Ecole des Hautes Etudes Commerciales

CONCOURS D'ADMISSION DE 1982

Mathématiques II

TOUTES OPTIONS

Samedi 15 Mai 1982, de 8 heures à midi

(La présentation, l'écriture et l'orthographe ont leur part dans la note.)

Dans tout le problème, on désigne par λ un nombre réel strictement positif. Le symbole ln représente le logarithme népérien.

PREMIÈRE PARTIE

1°) Soit φ la fonction numérique définie sur $]0, +\infty[$ par la relation

$$\varphi(x) = \ln x - \frac{1}{x^2}.$$

a) Etudier la variation de φ. Construire la courbe représentative de φ.

b) Montrer que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet une solution et une seule. Soit α cette solution.

c) Montrer que $1 < \alpha < e$.

d) Déterminer l'entier naturel k tel que $10^{-3}k \leqslant \alpha < 10^{-3}(k+1)$.

2°) Soit f_λ la fonction numérique définie sur $]-\lambda, +\infty[$ par la relation

$$f_\lambda(x) = \frac{1}{\lambda + x} - \lambda \ln(\lambda + x).$$

a) Montrer que l'équation $f_\lambda(x) = 0$ admet une solution et une seule. Soit x_λ cette solution.

b) Montrer que $1 < \lambda + x_\lambda$.

c) Montrer que $\lambda + x_\lambda$ admet une limite lorsque λ tend vers $+\infty$, et calculer cette limite.

DEUXIÈME PARTIE

Soit g_λ la fonction numérique définie sur $]-\lambda, +\infty[$ par la relation

$$g_\lambda(x) = e^{-\lambda x} \ln(x + \lambda).$$

1°) a) Calculer la dérivée g'_λ de g_λ. A l'aide de la première partie, déterminer le signe de $g'_\lambda(x)$.

b) Dresser le tableau de variation de g_λ. On pose $y_\lambda = g_\lambda(x_\lambda)$.

c) Calculer $g'_\lambda(0)$. A l'aide de la première partie, déterminer le signe de x_λ suivant la position de λ par rapport à α.

.../...

d) En calculant $g_\lambda(-\frac{\lambda}{2})$, trouver une minoration de y_λ.

e) Montrer que x_λ et y_λ admettent des limites (finies ou infinies) lorsque λ tend vers $+\infty$. Déterminer ces limites.

2°) Dans chacun des cas $\lambda = 1$ et $\lambda = 5$, déterminer l'élément p_λ de $\mathbb{Z}$ tel que $\frac{p_\lambda}{100} \leqslant x_\lambda < \frac{p_\lambda + 1}{100}$, et calculer $g_\lambda\left(\frac{p_\lambda + \frac{1}{2}}{100}\right)$.

3°) a) Construire sur un même graphique les courbes représentatives de g_1 et g_5. On prendra la même unité sur les deux axes et on ne dessinera que les points des courbes dont les coordonnées sont comprises entre —5 et 5.

b) Montrer que ces courbes ont un point commun P et un seul. (On pourra considérer la fonction h définie sur $[0, +\infty[$ par la relation

$$h(x) = e^{4x} \ln(x+1) - \ln(x+5)$$

et étudier la variation de h.)

c) Déterminer des valeurs approchées des coordonnées de P à 0,1 près.

TROISIÈME PARTIE

Pour tout entier naturel non nul n, on considère l'intégrale

$$I_n = \int_0^{+\infty} e^{-nx} \ln(n+x)\, dx.$$

1°) a) Montrer que l'intégrale I_n converge.

b) Montrer que

$$I_n = \frac{\ln n}{n} + \int_0^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{n(n+x)} dx.$$

En déduire que

$$\frac{\ln n}{n} \leqslant I_n \leqslant \frac{\ln n}{n} + \frac{1}{n^3}.$$

c) Montrer que

$$I_n \geqslant \frac{\ln n}{n} + \int_0^{n/10} \frac{e^{-nx}}{n(n+x)} dx \geqslant \frac{\ln n}{n} + \frac{10}{11} \frac{1}{n^3} (1 - e^{-n^2/10}).$$

2°) En déduire une valeur approchée I_5' de I_5 à 0,001 près.

FIN

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail